令 和 6 年 度

数　　学

問 題 冊 子

[1] (1) x を整数とし，

$$m = \frac{4x+6}{x^2+2x+3}$$

を考える．m が整数となる x とそのときの m を求めよ．

(2) k を整数とし，三次方程式

$$x^3+3x^2+x-3-k(x^2+2x+3)=0$$

を考える．この方程式が整数解を少なくとも一つ持つ様な k を求めよ．

[2] 漸化式 $a_{n+1} = |\,a_n\,| - 3$ で定められた数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $a_1 = 3$ のときの a_3 と a_4 を求めよ．また，$a_1 = 4$ のときの a_3 と a_4 求めよ．さらに，$a_1 = 5$ のときの a_3 と a_4 を求めよ．

(2) $a_1 = 3l$ のとき，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ となる n を求めよ．ただし，l は自然数とする．

(3) $a_1 = 3l-1$ のとき，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ となる n を求めよ．ただし，l は自然数とする．

(4) $a_1 = 3l-2$ のとき，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ となる n を求めよ．ただし，l は自然数とする．

[3] (1) $z + \dfrac{4}{z} = -2\sqrt{3}$ を満たす複素数 z を求め，z^n が実数となる最小の自然数 n を求めよ．

(2) 0 でない複素数 z に対して，$\left|z + \dfrac{4}{z}\right|$ の最小値とその最小値をとる z を求めよ．

[4] 実数 a に対して，$[a]$ を a 以下の最大の整数とする．

(1) 閉区間 $[1.4\,,\ 12]$ および閉区間 $[1\,,\ 13.2]$ に属する整数の個数をそれぞれ求めよ．

(2) $a < b$ のとき，閉区間 $[a,\ b]$ に属する整数の個数を，$[a]$ および $[b]$ を用いて表せ．

(3) $a_1 < b_1$，$a_2 < b_2$ とする．座標平面上の長方形 $\{(x,y)\,|\,a_1 \leqq x \leqq b_1,\ a_2 \leqq y \leqq b_2\}$ に属する格子点の個数を，$[a_1]$ と $[b_1]$ と $[a_2]$ と $[b_2]$ を用いて表せ．ただし，格子点とは座標平面上の点で x 座標と y 座標がともに整数であるものをいう．

(4) 正の実数 a に対して，座標平面上の正方形 $\{(x,y)\,|\,a \leqq x \leqq 2a,\ a \leqq y \leqq 2a\}$ に属する格子点の個数を N とし，この正方形の面積を S とする．a を限りなく大きくしたときの $\dfrac{N}{S}$ の極限を求めよ．