

# 熱方程式, Fourier 級数, Fourier 変換, 離散 Fourier 変換, etc.

武田好史<sup>\*1</sup>

## 要 約

熱方程式とは放物型偏微分方程式の一つで, 例えば針金の各点の温度変化を決定する方程式である. 本稿前半では, 伝統的な変数分離の方法を用いて, 理想的に単純化された条件の下での熱方程式の解法を考えることにより, Fourier 級数や Fourier 変換の基本的な原理を述べる. 続く後半では, 離散 Fourier 変換 (DFT) 及び高速 Fourier 変換 (FFT) について数学的視点から詳しく解説する.

# Heat Equation, Fourier Series, Fourier Transform, Discrete Fourier Transform, etc.

Yoshifumi TAKEDA<sup>\*1</sup>

## Abstract

Suppose that  $u$  is a function describing the temperature at a location in a metal bar. The heat equation is a parabolic partial differential equation which is used to determine the change in the function  $u$  over time. We explain the solution technique called separation of variables, which is a traditional method. In this article, we consider it especially in ideal conditions, in order to give an explanation of the principles of Fourier series and Fourier transform. And then we shall elaborate on discrete Fourier transform (DFT) and fast Fourier transform (FFT) from a mathematical point of view.

---

<sup>\*1</sup> 和歌山県立医科大学 医学部 数学・統計学教室

Department of Mathematics and Statistics, Wakayama Medical University

# 1 緒言

Fourier 級数や Fourier 変換の重要性をここで改めて述べる必要はないと思われる。おそらく自然科学に関わる者すべてにとっての必須の理論であろう。しかし同時に、初学者にはその考え方、あるいはそれに至るアイデアが解り辛いことも確かである。実際、筆者も Fourier 級数展開や畳み込み積を初めて学んだ時は、あまり興味を持てなかった記憶が今も残っている。しかしその様な筆者もやがて幾らか理解を深めて行く中で、Fourier 級数や Fourier 変換に関して時折素朴な感動を覚える様にもなってきた。本稿は、かつての筆者と同じように Fourier 級数展開や畳み込み積等の意義をなかなか見いだせないでいる初学者に対して、早期にそれらへの親しみ感じてもらうことを願ってまとめたものである。

従って、本稿は Fourier 級数や Fourier 変換を本格的に学び始める前、あるいは学び始めた頃に読んでもらうのが良いと思う。読み進めるにあたっては、概ね大学初年次の微分積分学と線型代数学の知識があれば困らないであろう。先に述べたように本稿はこれまで筆者が味わった感動を伝えることを目的としている。このため、全体を通して数学的厳密性を犠牲とすることを厭わず、基本原理を解説することを第一義としている。その結果、本稿で取り上げた内容を専門とされる方々にとっては目を覆いたくなるような部分も多々あると思われるが、ただ許しを乞うばかりである。

本稿は前半と後半の二つの部分に大きく分けることができる。前半は Fourier 変換の解析学的取扱いであり、後半は線型代数学的取扱いである。あるいは、前半は analog 的取扱い、後半は digital 的取扱いと言うこともできる。

前半では伝統的な導入に倣い、熱方程式から、Fourier 級数、Fourier 変換へと話を進めている。熱方程式については、針金の温度の分布と、それが導くその後の温度変化との関係式として、当然成り立つべきものと感得できる様に工夫した。また、Fourier 級数、即ち周期解を考えることの意義についてやや丁寧にふれることで、続く Fourier 変換の意味が捉えやすくなる効果を期待している。

特にこの前半に於いては、対象を理想的に単純化された条件下の熱方程式に限定することで、Fourier 級数、Fourier 変換の基本的な仕組みを解説するように心掛けた。話を進める中では勿論種々の収束定理を用いたり、極限の順序交換を行ったりしているが、先に述べた方針に従ってそれらについて詳しくは述べていない。また本来であれば、続けて Green 関数や  $\delta$  関数等へ話題を展開させていくべきところであろうが、本稿の趣旨に従い、やはりそれらの解析学の深い話題には立ち入っていない。

後半では、関数をサンプリングした離散データで取り扱う。本稿に於いて離散化とは、関数を多項式関数で近似することを意味し、しかもその多項式関数をベクトルとして取り扱っていく。つまり、関数はベクトルであり、Fourier 変換は線型写像ということとなる。一見人工的で技巧的とも思えるが、其の实 Fourier 級数展開や畳み込み積に対する理解を

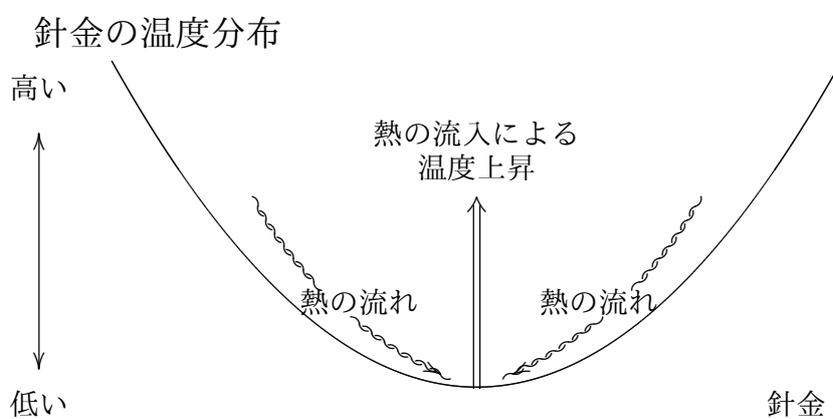
一段深いところへと導くものであることを詳しく解説した。

さらに本稿では、高速 Fourier 変換へと話を進めている。それは数学というよりはむしろ工学的な内容であるが、様々な分野との関わりを持つ Fourier 変換の諸相の一つとして是非ふれておいて頂きたい。

なお本稿は、筆者が 2014 年 1 月に奈良女子大学理学部で行った集中講義の内容を整理し、幾らかの加筆を施したものである。講義の機会を与えて頂いた松澤淳一氏と、内容に関しての種々の助言を授けて頂いた森藤紳哉氏に深く感謝の意を表す次第である。

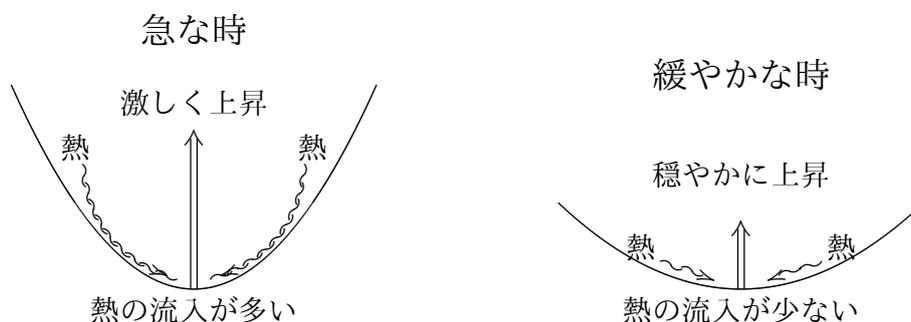
## 2 熱方程式の導入

一続きの針金の温度分布について考えてみよう。周辺に比べて温度が低いところがあると、そこには周りから熱が流れ込み、結果温度が上昇する。



この時、周辺との温度差が大きいところでは熱の流入も多くなり、従って温度の上昇も激しくなる。周辺との温度差は分布曲線の曲がり具合で表され、それ即ち曲率のことであるから、

温度の分布曲線の曲がり具合（曲率）が



温度の分布曲線の各点での曲率が、その点の温度上昇を決定することとなる。今針金の温度の分布が  $u(x, t)$  で表されているとしよう。ただし、 $x$  は針金上の点の位置を表し、 $t$  は時刻を表すとする。この時、分布曲線の曲率は  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  であり、温度上昇は  $\frac{\partial u}{\partial t}$  で表される。

上の考察からこれらは比例関係にあると考えられる。従って、比例定数が1となる様に温度や時刻の単位を適切に選ぶと、熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

が導かれる。<sup>\*2</sup>

### 3 変数分離の方法

熱方程式 (1) を一般的に解くのは非常に難しい。ここでは変数分離の方法<sup>\*3</sup>で、即ち温度分布を表す二変数関数  $u(x,t)$  が一変数関数  $g(x)$  と  $h(t)$  の積

$$u(x,t) = g(x) \cdot h(t)$$

であるとして考えていく。この場合、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x) \cdot \frac{d}{dt} h(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2}{dx^2} g(x) \cdot h(t)$$

であるから、これらが等しいということは、

$$g(x) \cdot \frac{d}{dt} h(t) = \frac{d^2}{dx^2} g(x) \cdot h(t)$$

となり、さらに書き直すと

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}$$

となる。これは  $x$  に関係しない左辺と、 $t$  に関係しない右辺が常に等しいということであるから、この比が表すものは  $x$  にも  $t$  にも関係しない。従って、常に一定

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = -\xi \quad (\text{定数}) \quad (2)$$

ということである。<sup>\*4</sup> 再び書き直すと、

$$h'(t) = -\xi h(t), \quad g''(x) = -\xi g(x)$$

となる。これらの微分方程式については、容易に解を求めることができる。例えば、

$$h(t) = e^{-\xi t}$$

などで、また

$$g(x) = e^{\sqrt{\xi}ix}, \quad e^{-\sqrt{\xi}ix}$$

<sup>\*2</sup> 熱伝導方程式とも呼ばれる。ここで考察した熱の伝導ではなく、物質の拡散を考えた場合、拡散方程式と呼ばれる同じ方程式が導かれる。

<sup>\*3</sup> Fourier の方法とも呼ばれる。《Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) フランスの数学者・物理学者》

<sup>\*4</sup> 後の表記の煩雑さを避けるため、 $\xi$  に負号 “-” をつけた。

などが解であることもすぐわかる。これらの積を取ることで、熱方程式 (1) の解

$$e^{-\xi t} e^{\sqrt{\xi} ix}, \quad e^{-\xi t} e^{-\sqrt{\xi} ix}$$

が得られる。勿論これらの定数倍や和を取った

$$Ae^{-\xi t} e^{\sqrt{\xi} ix} + Be^{-\xi t} e^{-\sqrt{\xi} ix}$$

も解である。書き直すと、

$$(A+B)e^{-\xi t} \cos(\sqrt{\xi} x) + (A-B)ie^{-\xi t} \sin(\sqrt{\xi} x)$$

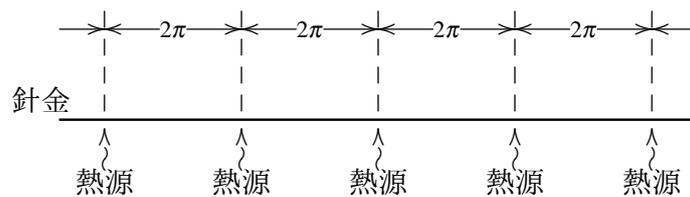
となる。今  $\xi$  は正の場合だけを考えることとし、さらに  $A, B$  の値をうまく選ぶことで、

$$e^{-\xi t} \cos(\sqrt{\xi} x), \quad e^{-\xi t} \sin(\sqrt{\xi} x) \quad (3)$$

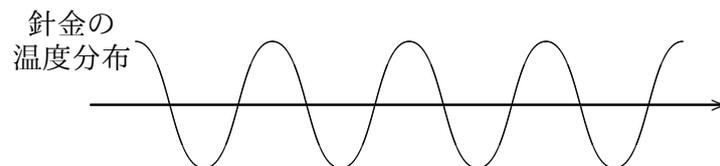
などの実数解が得られる。勿論これらの実数倍や和もやはり実数解である。

## 4 Fourier 級数

熱方程式の解をまずは“簡単な場合”に詳しく見ていきたい。しかしこの“簡単な場合”とは如何なる場合のことであろうか。例えば、針金が有限である時は簡単な様にも思えるが、外部との熱の出入り（境界条件）を考える必要があり、簡単とは言えない。針金が無限に延びている時は、外部との熱の出入りを気にせずに、針金だけで考察できるが、いきなり無限を考えるのはやはり難しい。そこで、同じ状態が規則的に無限に繰り返される場合（周期的な状態）を考えることとする。例えば無限に延びた針金に対して、等質な熱源を等間隔に配置した場合、



この時の針金の温度分布が余弦曲線となったとしよう。

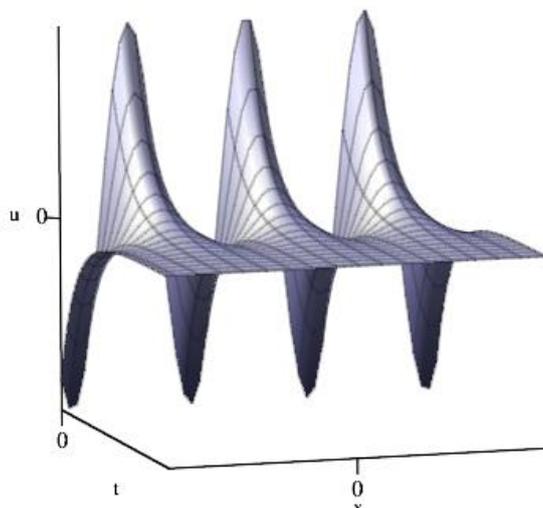


時刻  $t = 0$  に、一斉に熱の供給を停止したとする。（針金と外部との熱の出入りをなくしたとする。）最初の考察で見たように、温度分布の谷底のところは熱の流れ込みによって温度が上昇する。逆に、山の頂上のところは熱の流出によって温度が低下する。その様子は

熱方程式 (1) に従うはずである。先の変数分離の方法で得られた実数解 (3) の中で、 $t = 0$  に於いて周期  $2\pi$  の余弦曲線となっているものとしては

$$u(x,t) = Ae^{-t} \cos x$$

がある。<sup>\*5</sup> 実際、この解のグラフは、



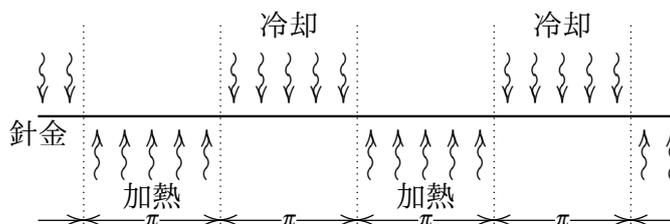
となり、谷底は徐々に上昇し、また頂上は徐々に下降していく様子が窺え、我々が認識するところの温度分布の変化とほぼ一致している。

今の考察は、初期状態 ( $t = 0$ ) が余弦曲線という場合であり、変数分離の方法で得られた典型的な一つの実数解にもともと合致する場合であった。では一般に、初期状態が周期的であるならば、それに対応する解を、変数分離の方法で得られた実数解の中に見出せるのであろうか。一瞥したところ、変数分離という特殊な方法で得られた解、あるいはそれらの組み合わせ<sup>\*6</sup>で一般の解を構成しようというのは、かなり無謀な目論見とも思える。しかし Fourier は、周期的であれば如何なる初期状態に対しても、先の

変数分離の方法で得られた解の定数倍と無限和で、一般の解を構成できる

と主張した。

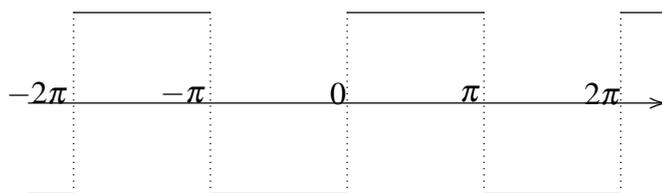
例えば、針金を等間隔に区切り、



加熱部分と冷却部分を交互に配置することで、温度分布が

<sup>\*5</sup>  $A$  は時刻  $t = 0$  の時の温度分布によって決まる定数。

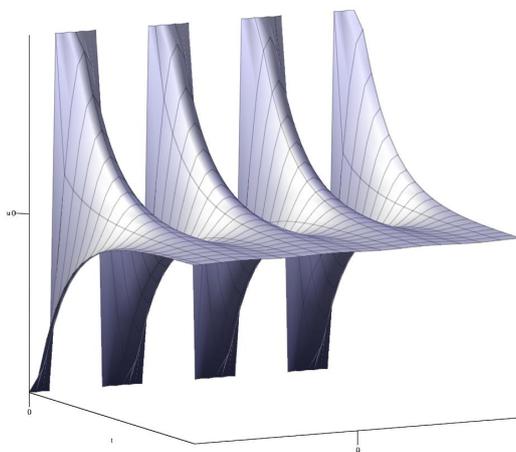
<sup>\*6</sup> つまり、(2) の  $\xi$  をいろいろな正の実数で考え、得られた解を重ね合わせるということ。



の様にかにも人工的なものとなったとしよう。周期的とはいえ、正弦関数や余弦関数等とはかなり異質なものと思えるが、実はこのような場合も無限和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 t} \sin((2n-1)x)$$

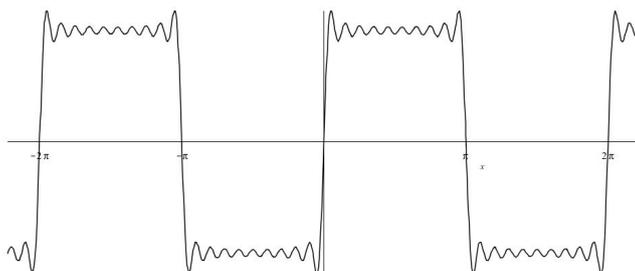
が求める解となることが知られている。実際、 $u(x,t)$  のグラフを見てみると、



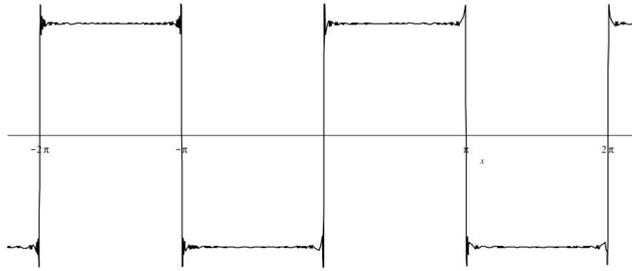
となり、確かに求める解となっているようである。また初期状態 ( $t = 0$ )

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} \sin((2n-1)x) \\ &= 2 \sin x + \frac{2}{3} \sin(3x) + \frac{2}{5} \sin(5x) + \frac{2}{7} \sin(7x) + \dots \end{aligned}$$

の  $n = 10$  までの有限和のグラフを見ると



となり、さらに  $n = 100$  までの有限和のグラフを見ると



となり、不自然な関数が再現されていく様子が窺える。

Fourier の主張は、残念ながら厳密には如何なる場合も成り立つとはいえないが、多くの場合は（それが人工的で不自然なものであろうと、）三角関数の無限和を用いて表せることが知られている。<sup>\*7 \*8</sup>

以下、Fourier の主張が成り立つ場合を考えることとする。針金の温度分布の初期状態 ( $t = 0$ ) として関数  $f(x)$  が与えられているとし、それに対応する解を見つけ出す方法を考えてみよう。勿論ここでは、初期状態  $f(x)$  は周期  $2\pi$  の関数であるとしている。この時、熱方程式の解  $u(x, t)$  も  $x$  に関して周期  $2\pi$  でなければならない。

一方、周期が  $2\pi$  の場合の基本となる関数は

$$\cos(nx), \quad \sin(nx)$$

である。ここで、 $n$  は様々な自然数を取りうる。先の考察から、これらそれぞれに対応する時間経過を表す関数

$$e^{-n^2 t}$$

を掛けたものは熱方程式の解となる。さらに、定数倍も  $2\pi$  を周期とする解であり、これらすべての和を取った

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)) \quad (4)$$

が、Fourier の主張に沿った周期  $2\pi$  の一般解ということである。<sup>\*9</sup>

従って、もし係数  $A_n, B_n$  を上手く選ぶことで初期状態を

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)) \quad (5)$$

と表すことができれば、その時の (4) が求める解ということとなる。

では、与えられた周期関数  $f(x)$  を (5) の形で表すには、言い換えると係数  $A_n, B_n$  を決定するには如何にすればよいのであろうか。それには次のよく知られた積分の計算が有効

<sup>\*7</sup> 勿論本稿では証明等に深入りはしない。

<sup>\*8</sup> このことが関数概念の再検討を促すこととなり、さらには数学の抽象化への方向付けとなったともいわれている。

<sup>\*9</sup> ただし、定数項が 0 となるように温度の単位を上手く選んだとする。

である：

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cdot \sin(nx) dx &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cdot \cos(nx) dx &= 0 \quad (m \neq n) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx) dx &= 0 \quad (m \neq n) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \pi.\end{aligned}$$

これらと積分の線型性を用いると次のような計算ができる：

$$\begin{aligned}& \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(mx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)) \right) \cos(mx) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx + B_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx) dx \right) \quad (6) \\ &= A_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cdot \cos(mx) dx \\ &= A_n \pi.\end{aligned}$$

同様の計算が、 $\sin(mx)$  を掛けた場合も可能であるから、結局

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx$$

により、係数  $A_n, B_n$  を求めることができ、従って、周期的な関数  $f(x)$  を (5) の形で表すことができる。またさらに、その後の温度分布の変化を表す関数（熱方程式の解）を (4) の形で表すことができる。

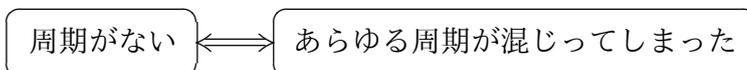
(5) の様な正弦と余弦の無限和を **Fourier 級数** といい、その係数  $A_n, B_n$  を **Fourier 係数** という。

## 5 Fourier 変換

次に、初期状態が周期的とは限らない場合について考えてみよう。この場合、熱方程式の解も周期的ではないから、前節の様に

$$e^{-n^2 t} \cos(nx), \quad e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

を単純に組み合わせて解が構成できるとは考えにくく、当然ながら新たなアプローチが必要である。ここでは、



と考えることとしよう。<sup>\*10</sup> 即ち、初期状態が周期的ではない場合には、あらゆる周期の解を総動員することとなる。

従って我々の目標は、様々な周期解の重ね合わせにより、非周期解を構成することである。この場合、先に変数分離法で求めた解

$$e^{-\xi t} \cos(\sqrt{\xi} x), \quad e^{-\xi t} \sin(\sqrt{\xi} x) \quad (3)$$

に於いて、 $\sqrt{\xi}$  を自然数だけではなく、正の実数全体を連続的に変化させる必要がある。以後の記述を簡単にするために、まず  $\sqrt{\xi}$  を  $\omega$  と書くこととする。この時、我々は

$$e^{-\omega^2 t} \cos(\omega x), \quad e^{-\omega^2 t} \sin(\omega x)$$

を考えることとなるが、複素数を用いて、もとの

$$e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x}, \quad e^{-\omega^2 t} e^{-i\omega x}$$

に戻して考えることとする。さらに、今  $\omega$  は正の実数を渉としているが、負の実数をも取りうるとするれば、上の二つを一つにまとめることができる。結果、 $\omega$  を実数全体に渉って変化させながら、

$$e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} \quad (7)$$

を考えれば、あらゆる周期の基本解を考えたこととなる。<sup>\*11</sup>

初期状態 ( $t=0$ ) に注目しよう。各周期毎にそれぞれの係数を考えることは、各周期にその定数を対応させることで、それは周期  $\omega$  を変数とする関数  $C(\omega)$  を考えることである。これらを重ね合わせるために前節の級数展開の時に倣って、各周期の定数倍、つまり

$$C(\omega) e^{i\omega x}$$

の和を取りたいが、発散を避けながら無限の種類に渉って和を取るために

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

のように積分を用いることとする。従って我々が目標とすることは、周期的とは限らない一般の関数  $f(x)$  (初期状態) をあらゆる周期の各々の定数倍の総和として積分

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

の形で表示することである。これが先の周期的な場合の Fourier 級数展開に対応し、また周期を変数とする関数  $C(\omega)$  が Fourier 係数に対応する。

<sup>\*10</sup> 勿論他の考え方もあるであろう。この“周期的ではない”の考え方等、「否定をどのように捉えるのか」というところに、それぞれの“哲学”が現れる。

<sup>\*11</sup> 0 の捉え方は難しいが、本稿では深入りしない。

しかしながら、この Fourier 係数に対応する  $C(\omega)$  は、如何にして得られるのであろうか。実は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\eta x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{i\omega x} d\omega \right) e^{-i\eta x} dx = 2\pi C(\eta)$$

が成り立つことが知られている。<sup>\*12</sup> 従って、我々は

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad (8)$$

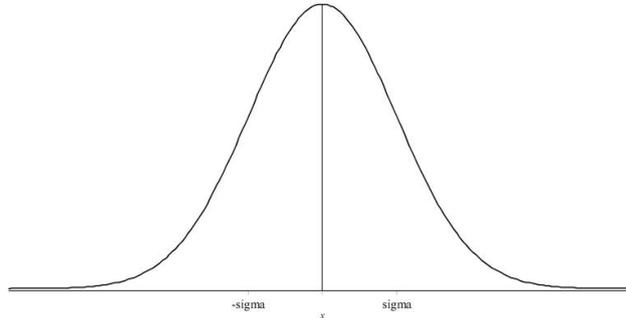
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{i\omega x} d\omega \quad (9)$$

なる関係式を得る。関数  $f(x)$  に各周期の係数  $C(\omega)$  を対応させる (8) を Fourier 変換、各周期の係数  $C(\omega)$  から元の関数  $f(x)$  を復元する (9) を Fourier 逆変換という。

### Fourier 変換の例 1.

Gauß関数（正規分布の元となる関数）の一つ

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$



を Fourier 変換すると、

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-i\omega x} dx = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}$$

となる。<sup>\*13</sup>

ここで、Fourier 変換後の  $C(\omega)$  もまた Gauß関数であることと、 $f(x)$  では分母にあった分散を表す  $\sigma^2$  が、 $C(\omega)$  では分子（変数  $\omega$  の前）にあることに注意してもらいたい。即ち Fourier 変換により、広がった分布は平均付近に密集した分布に、逆に平均付近に密集した分布は広がった分布に変換されることがわかる。

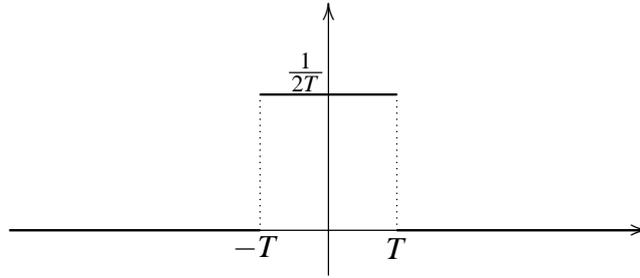
<sup>\*12</sup> 前節 (6) に相当する。附録 12.2 参照。

<sup>\*13</sup> 附録 12.3 参照。

## Fourier 変換の例 2.

関数

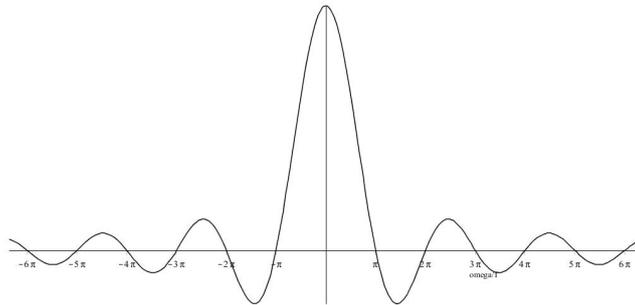
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2T} & (-T < x < T) \\ 0 & (x \leq -T, T \leq x) \end{cases}$$



を変換すると,

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{1}{2T} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{4\pi T} \int_{-T}^T e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{4\pi T} \int_{-T}^T \cos(\omega x) dx = \frac{1}{4\pi T} \left[ \frac{\sin(\omega x)}{\omega} \right]_{-T}^T = \frac{\sin(T\omega)}{2\pi T\omega} \end{aligned}$$

となり, グラフは



の様なものとなる.

この場合も, 元の関数  $f(x)$  の  $T$  が大きい時, 即ちグラフの箱が横長の時は変換後の  $\sin$  の変数  $\omega$  の係数が大きくなるため,  $\omega = 0$  付近に密集した縦長のものとなり, 逆に元のグラフの箱が縦長の時は変換後のグラフは横に広がったものとなる.

## 6 畳み込み積

周期  $\omega$  を変数とする二つの関数  $A(\omega)$ ,  $B(\omega)$  に対して, 畳み込み積  $A(\omega) * B(\omega)$  を

$$A(\omega) * B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\eta) \cdot B(\omega - \eta) d\eta \quad (10)$$

と定める。これを Fourier 逆変換すると、

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) * B(\omega) \cdot e^{i\omega x} d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} A(\eta) \cdot B(\omega - \eta) d\eta \right) e^{i\omega x} d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} A(\eta) \left( \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega - \eta) e^{i\omega x} d\omega \right) d\eta \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} A(\eta) \left( \int_{-\infty}^{\infty} B(\bar{\omega}) e^{i(\bar{\omega} + \eta)x} d\bar{\omega} \right) d\eta \quad (\bar{\omega} = \omega - \eta) \\
 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} A(\eta) e^{i\eta x} d\eta \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} B(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega} x} d\bar{\omega} \right)
 \end{aligned}$$

となる。即ち、周期を変数とする関数  $C$  の Fourier 逆変換を  $\mathcal{F}(C)$  で表すこととすると

$$\mathcal{F}(A * B) = \mathcal{F}(A) \cdot \mathcal{F}(B)$$

となり、

$\text{畳み込み積の Fourier 逆変換は通常積となる}$

ことがる。

## 7 熱核

熱方程式において、周期<sup>\*14</sup>が  $\omega$  の解は

$$e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} \tag{7}$$

であった。従って、初期状態  $f(x)$  が

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

である時の熱方程式の解は

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega$$

となる。一方、先に見た様に

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \tag{8}$$

が成り立つから、初期状態  $f(x)$  に対する熱方程式の解は

---

<sup>\*14</sup> 負の実数も含める。

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \right) e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega \right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t + i\omega(x-y)} d\omega \right) f(y) dy
\end{aligned}$$

となる。従って、関数  $K(x,t)$  を

$$K(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t + i\omega x} d\omega$$

とおくと、初期状態  $f(x)$  との畳み込み積として、熱方程式の解  $u(x,t)$  は

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t) f(y) dy$$

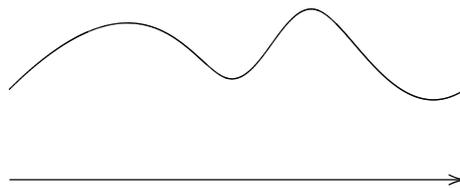
と表せる。この関数  $K(x,t)$  を熱核といい、<sup>\*15</sup>

$$K(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

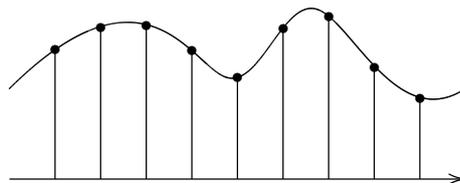
となることが知られている。<sup>\*16</sup>

## 8 離散 Fourier 変換 (DFT)

ここまでは、現象を表す関数を、できるだけ現象に近いものに取り、それをそのまま数学的に処理してきた。ここからは少し立場を変えて、現象をサンプリングすることで、離散的なデータとして取り扱うことを考えてみよう。例えば、



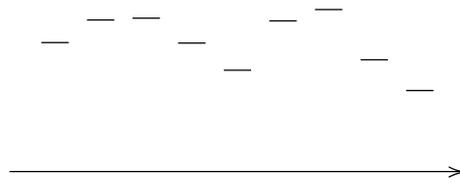
のような現象を考える時、決められた場所で現象を観測し、



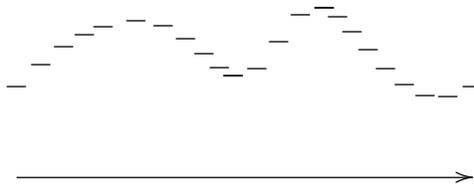
そのサンプリング値を考えることとする。もっとも

<sup>\*15</sup> 熱方程式の Green 関数ともいう。

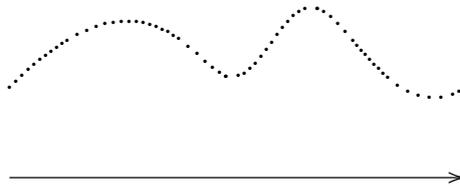
<sup>\*16</sup> 附録 12.4 参照。



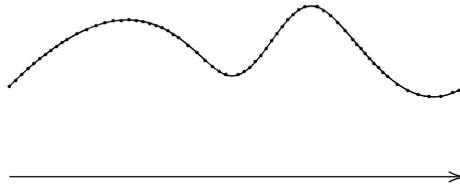
の様な粗いサンプリングでは元の関数との相違が目立つが、



の様に、さらには



と十分細かくサンプリング値を求めておけば、このサンプリング値を多項式関数で結んだ場合



の様に我々人間にとっては元の関数との違いをもはや認識することはできない。従って以後は、

現象を人間にとって十分細かくサンプリングし、サンプリング値を多項式関数でつなぐ

こととする。即ち今後取り扱う現象（関数）はすべて多項式で表されているとする。<sup>\*17</sup>

今人間にとって十分大きな自然数  $N$  を定め、現象  $f(x)$  を  $N$  個の点  $x_1, x_2, \dots, x_N$  でサンプリングし、サンプリング値

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)$$

を得たとする。  $f(x)$  が  $N-1$  次以下の多項式関数であるならば、このサンプリング値で  $f(x)$  は完全に特定される。同じサンプリング値を実現する  $N$  次以上の多項式関数も当然存在するが、  $N-1$  次以下の多項式関数との違いを人間は認識できないこととなる。従って以後は、  $N-1$  次以下の多項式のみを取り扱うこととし、  $N$  次以上の複雑で細かな動きを人間は認識できないものとして、定数関数、つまり

$$x^N = 1$$

<sup>\*17</sup> 勿論現実には多項式関数では表せない現象があるが、多項式関数との違いを人間は認識できない。

と考える.\*18 この場合、 $N$  個のサンプリング値から多項式が決まるから、サンプリング値を並べた  $N$  次元ベクトル

$$(a_1, a_2, \dots, a_N)$$

が多項式を表していることとなる。

$N-1$  次以下の多項式関数の表し方は勿論これだけではない。通常の記述

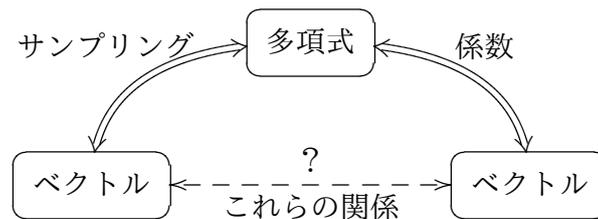
$$c_0 + c_1x + \dots + c_{N-1}x^{N-1}$$

によっても多項式を表すことができる。各次数の係数を取り出すことにより、この時も  $N$  次元ベクトル

$$(c_0, c_1, \dots, c_{N-1})$$

が得られ、かつそれが元の多項式を特定している。

さて我々は、一つが多項式から異なる方法で対応付けられた 2 つのベクトルを得ることとなったが、ここに至り、これら 2 つのベクトルはどのような関係にあるのかという疑問が生じる。



多項式  $f(x)$  を

$$f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{N-1}x^{N-1} \quad (11)$$

のように表すことはあまりにも一般的であり、我々も普段特に意識していないが、関数を

$$1, x, \dots, x^{N-1}$$

という標準的な多項式、つまり単項式の定数倍と和で表していることに他ならない。それはまさに

$$\cos(nx), \quad \sin(nx) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

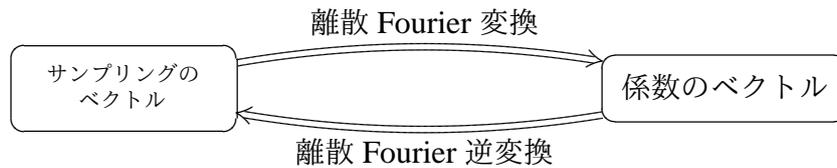
という標準的な周期解、つまり正弦余弦の定数倍と和で関数  $f(x)$  を

$$f(x) = A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos(2x) + B_2 \sin(2x) + \dots$$

と表しているのと同じではなからうか。即ち、実は (11) は多項式の Fourier 級数展開であり、従って  $(c_0, c_1, \dots, c_{N-1})$  が Fourier 係数であったということである。

\*18 多項式環  $\mathbb{C}[x]$  の剰余環  $\mathbb{C}[x]/(x^N - 1)$  で考えるということ。

一方サンプリングのベクトルは、離散化を経ているが元の関数そのもの（元の現象そのもの）であるから、結局のところ、



の様な関係にあることがわかる。<sup>\*19</sup>

先の Fourier (逆) 変換は、関数から関数への変換であり、積分を用いて表された。今の離散 Fourier (逆) 変換の場合は、ベクトルからベクトルへの変換である。しかしながら変換するといっても、元となっている多項式に変化はない。また元の多項式の和や定数倍を考えた時、それらに対応するサンプリングや係数のベクトルもやはりそれぞれの和や定数倍となる。即ち、積分で表された先の Fourier (逆) 変換と同じく、この変換も線型性を持つこととなり、従って、

離散 Fourier (逆) 変換は線型変換である

ことがわかる。

さて、本稿で念頭に置いている関数は現実の現象を表す関数であり、その意味で勿論実数関数を考えている。従ってサンプリングによる近似で得られた多項式も実数を係数とするものを考えることとなるが、数学的記述を簡単にするために、また効率的に考察を進めるために再び“複素数”を用いる。即ち、以後本稿ではサンプリング値を 1 の  $N$  乗根：

$$1, e^{2\pi i \frac{1}{N}}, e^{2\pi i \frac{2}{N}}, \dots, e^{2\pi i \frac{N-1}{N}}$$

に於いて取ることとする。原始  $N$  乗根  $e^{2\pi i \frac{1}{N}}$  を  $\zeta$  と書けば、これらの点は

$$1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{N-1}$$

と表せる。<sup>\*20</sup>

多項式  $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{N-1}x^{N-1}$  を考えよう。係数のベクトルは

$$(c_0, c_1, \dots, c_{N-1})$$

であり、またサンプリングによりベクトルは

$$(f(1), f(\zeta), f(\zeta^2), \dots, f(\zeta^{N-1}))$$

となる。この時、各  $x = \zeta^k$  でのサンプリング値は

<sup>\*19</sup> 離散 Fourier 変換: Discrete Fourier Transform (DFT)

<sup>\*20</sup> 勿論  $\zeta^N = 1$  であり、それは  $x^N = 1$  に合致する。

$$\begin{aligned}
f(\zeta^k) &= c_0 + c_1 \zeta^k + \cdots + c_{N-1} \zeta^{k(N-1)} \\
&= (1, \zeta^k, \dots, \zeta^{k(N-1)}) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である。従って、この場合の離散 Fourier 逆変換は

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ f(\zeta) \\ \vdots \\ f(\zeta^{N-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \cdots & \zeta^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{N-1} & \cdots & \zeta^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}$$

となることがわかる。

さらにここで、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \cdots & \zeta^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{N-1} & \cdots & \zeta^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta^{-1} & \cdots & \zeta^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{-(N-1)} & \cdots & \zeta^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & & & \\ & \ddots & & \\ & & N & \end{pmatrix}$$

となることから、\*21

$$\frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta^{-1} & \cdots & \zeta^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{-(N-1)} & \cdots & \zeta^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

が離散 Fourier 変換を与える行列であることがわかる。

## 9 多項式の積

引き続き  $x^N = 1$  の下で、今度は多項式

$$\begin{aligned}
f(x) &= c_0 + c_1 x + \cdots + c_{N-1} x^{N-1}, \\
g(x) &= d_0 + d_1 x + \cdots + d_{N-1} x^{N-1}
\end{aligned}$$

の積について詳しく見てみよう。  $x^N = 1$  に注意すると、積で 1 次となる項は

$$1 \cdot x, \quad x \cdot 1, \quad x^2 \cdot x^{N-1}, \quad x^3 \cdot x^{N-2}, \quad \dots, \quad x^{N-1} \cdot x^2$$

---

\*21  $(k+1, l+1)$  成分 =  $\begin{cases} 1 + \zeta^{k-k} + \zeta^{2(k-k)} + \cdots + \zeta^{(N-1)(k-k)} = 1 + 1 + \cdots + 1 = N & (k=l) \\ 1 + \zeta^{k-l} + \zeta^{2(k-l)} + \cdots + \zeta^{(N-1)(k-l)} = \frac{\zeta^{N(k-l)} - 1}{\zeta^{k-l} - 1} = \frac{1^{k-l} - 1}{\zeta^{k-l} - 1} = 0 & (k \neq l). \end{cases}$

の  $N$  種類であり, これらの係数の和

$$c_0 \cdot d_1 + c_1 \cdot d_0 + c_2 \cdot d_{N-1} + \cdots + c_{N-1} \cdot d_2$$

が積の 1 次の係数となる. 掛け合された元の係数の添え字を見ると,  $N=0$  と考えれば和が 1 となっていることがわかる.

一般に, 積の  $k$  次の係数は

$$c_0 \cdot d_k + c_1 \cdot d_{k-1} + c_2 \cdot d_{k-2} + \cdots + c_{N-1} \cdot d_{k+1}$$

となり, 和の記号  $\Sigma$  を用いると,

$$\sum_{i=0}^{N-1} c_i \cdot d_{k-i} \quad (12)$$

となる. ただし, 添え字においては  $N=0$  と考えている. まとめると, 多項式

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1 x + \cdots + c_{N-1} x^{N-1}, \\ g(x) &= d_0 + d_1 x + \cdots + d_{N-1} x^{N-1} \end{aligned}$$

の積は

$$\sum_{i=0}^{N-1} c_i \cdot d_{-i} + \sum_{i=0}^{N-1} c_i \cdot d_{1-i} x + \cdots + \sum_{i=0}^{N-1} c_i \cdot d_{N-1-i} x^{N-1}$$

となる. 従って,  $f(x) \cdot g(x)$  の係数のベクトルは

$$\left( \sum_{i=0}^{N-1} c_i \cdot d_{-i}, \sum_{i=0}^{N-1} c_i \cdot d_{1-i}, \dots, \sum_{i=0}^{N-1} c_i \cdot d_{N-1-i} \right)$$

となる.

さて, もう一度  $k$  次の係数

$$\sum_{i=0}^{N-1} c_i \cdot d_{k-i} \quad (12)$$

をよく見てみよう. これは標準的な多項式である単項式  $x^k$  の係数 (Fourier 係数) としての役割を持つ. 併せて, 先の畳み込み積

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\eta) \cdot D(\omega - \eta) d\eta \quad (10)$$

を思い出そう. これは周期  $\omega$  を変数とする関数であり, 従って標準的な周期関数  $e^{i\omega x}$  の係数 (Fourier 係数) としての役割を持つ.

更にここで, 本来の積分の意味に立ち戻って考えてみよう. 即ち積分とは和を細分化した極限である\*22から, (10) の  $\int$  と  $d\eta$  は, (12) の  $\Sigma$  と (書かれていない) 1 を細分化したものと捉えることができる. この時, 周期  $\omega$  が次数  $k$  に,\*23 積分の変数  $\eta$  が和の添え字  $i$  に対応していることが見て取れる. つまり,

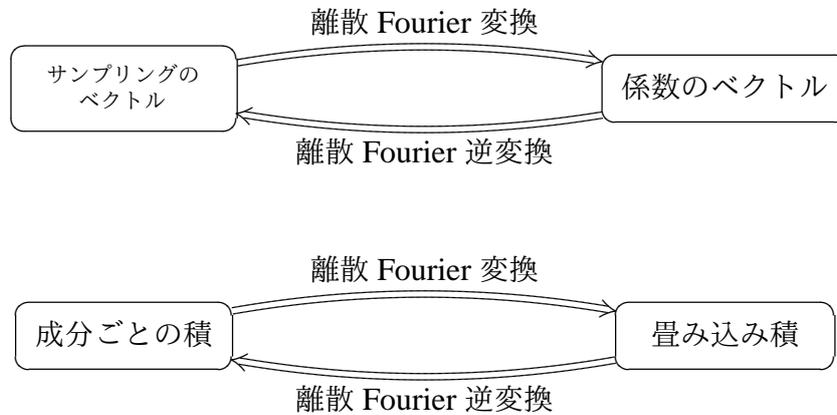
\*22 本稿でも, 積分で表される Fourier 逆変換 (9) は Fourier 級数展開 (5) の細分化として導入した.

\*23 周期全体  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  は次数全体  $\mathbb{Z}/N = \{0, 1, \dots, N-1\}$  に対応している.

二つの多項式の積を取ると、係数だけを見ればそれは“畳み込み積”となっている

ことがわかる。

一方、二つの多項式の積のサンプリングをとると、当然それぞれの各サンプリング値の積となっているはずである。即ち、



の様な関係にある。正にこれは、先に見た

畳み込み積の Fourier 逆変換は通常の積

に対応している。以上の様に、 $x^N = 1$  の下で多項式の積を考え、さらに係数のみに着目することで、畳み込み積の本来の意味が明らかとなったのではないだろうか。

## 10 高速 Fourier 変換 (FFT)

多項式の積を求めることは、係数の畳み込み積を求めることである。



即ち、各次数において

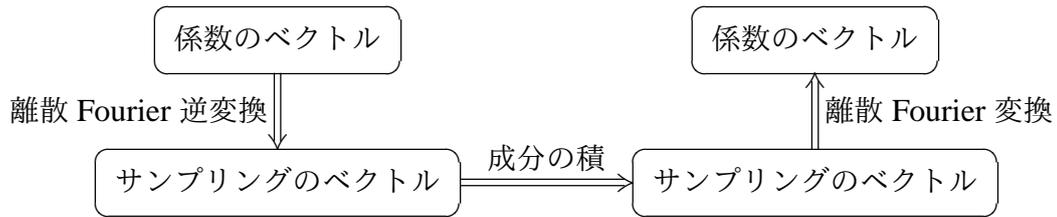
$$\sum_{i=0}^{N-1} c_i \cdot d_{k-i}$$

を計算することとなるが、これは各次数掛け算を  $N$  回と足し算を  $N-1$  回の計  $2N-1$  回であり、それを  $0$  次から  $N-1$  次までの  $N$  回繰り返すこととなるから、多項式の積を求めるために必要な計算量は  $2N^2 - N$  となる。一方、離散 Fourier (逆) 変換したところ (サンプリングしたところ) で積を考えるのであれば、それは

$$(a_0 \cdot b_0, a_1 \cdot b_1, \dots, a_{N-1} \cdot b_{N-1})$$

であり、これを求めるために必要な計算量は勿論  $N$  となり、数学的には全く同じものを求めているにも拘らず、これら二つの計算量は大きく異なる。

従って、もし離散 Fourier (逆) 変換が早く計算できるなら、



という遠回りも有効となるはずである．そのため以下，離散 Fourier (逆) 変換を高速で処理する方法について考えていきたい．

ところで，離散 Fourier 逆変換を与える行列について

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta & \dots & \zeta^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \zeta^{N-1} & \dots & \zeta^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & N \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & N & & \end{pmatrix}$$

が成り立つ.\*<sup>24</sup> つまり，離散 Fourier 逆変換を与える行列は，自分自身が逆行列（離散 Fourier 変換の行列）に非常に近いということであり，\*<sup>25</sup> 離散 Fourier 逆変換を高速で計算できれば，ほぼ同じ手段で離散 Fourier 変換も高速で計算できる．故に以後本稿では，主に離散 Fourier 逆変換を処理する方法を考えていく．

離散 Fourier 逆変換を与える行列を， $D_\zeta$  と書くこととする．つまり，

$$D_\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta & \dots & \zeta^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \zeta^{N-1} & \dots & \zeta^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

この行列による変換

$$\begin{pmatrix} f(\zeta^0) \\ f(\zeta^1) \\ \vdots \\ f(\zeta^{N-1}) \end{pmatrix} = D_\zeta \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}$$

を詳しく見ていこう．

以下， $N = 2^m$  の時を考える．この場合，

$$(\zeta^2)^{\frac{N}{2}} = 1$$

であり，

---

\*<sup>24</sup>  $(k+1, l+1)$  成分  $= 1 + \zeta^{k+l} + \zeta^{2(k+l)} + \dots + \zeta^{(N-1)(k+l)} = \begin{cases} 1+1+\dots+1 = N & (\text{if } k+l = 0 \text{ or } N) \\ \frac{\zeta^{N(k+l)} - 1}{\zeta^{k+l} - 1} = \frac{1^{k+l} - 1}{\zeta^{k+l} - 1} = 0 & (\text{otherwise}) . \end{cases}$

\*<sup>25</sup> 成分の順序を入れ換えて，各成分を  $N$  で割ればよい．

$$(\zeta^2)^0, (\zeta^2)^1, \dots, (\zeta^2)^{\frac{N}{2}-1}, (\zeta^2)^{\frac{N}{2}}, (\zeta^2)^{\frac{N}{2}+1}, \dots, (\zeta^2)^{\frac{N}{2}+\frac{N}{2}-1}$$

は、真中を境に前半と後半で同じ値を繰り返している。

ここで、変換したい多項式が

$$f(x) = c_0 + c_2x^2 + \dots + c_{N-2}x^{2(\frac{N}{2}-1)}$$

の様に偶数次の項のみから出来ていたとし、この  $f(x)$  に対し次の多項式を考える：

$$\tilde{f}(x) = c_0 + c_2x + \dots + c_{N-2}x^{\frac{N}{2}-1}.$$

この時、

$$f(x) = \tilde{f}(x^2)$$

となっている。サンプリング値は

$$f(1), f(\zeta), f(\zeta^2), \dots, f(\zeta^{N-1})$$

であり、これを書き換えると

$$\tilde{f}(\zeta^{2 \cdot 0}), \tilde{f}(\zeta^{2 \cdot 1}), \dots, \tilde{f}(\zeta^{2(\frac{N}{2}-1)}), \tilde{f}(\zeta^{2 \cdot \frac{N}{2}}), \tilde{f}(\zeta^{2(\frac{N}{2}+1)}), \dots, \tilde{f}(\zeta^{2(\frac{N}{2}+\frac{N}{2}-1)})$$

となり、前半と後半で同じ値を繰り返していることがわかる。つまり、

多項式が偶数次の項のみから成る時は、半分だけ計算すればよい

ことがわかる。

以後の記述の簡単化のために  $\eta = \zeta^2$  とおく。この時、 $\eta^{\frac{N}{2}} = 1$  である。この  $\eta$  を用いて偶数次の項のみの離散 Fourier 逆変換を考えると、

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}(1) \\ \tilde{f}(\eta) \\ \vdots \\ \tilde{f}(\eta^{\frac{N}{2}-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \eta & \dots & \eta^{\frac{N}{2}-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \eta^{\frac{N}{2}-1} & \dots & \eta^{(\frac{N}{2}-1)(\frac{N}{2}-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-2} \end{pmatrix}$$

となる。この変換を与える行列  $D_\eta$  は、当然ながら行、列とも  $D_\zeta$  の半分の大きさである。

一般に、 $N$  次の正方行列にベクトルを掛ける時は、掛け算を  $N^2$  回、また足し算を  $(N-1)N$  回実行することとなり、あわせて計算量は  $2N^2 - N$  である。従って、 $N$  が大きくなる時の計算量は  $N$  の自乗のオーダーで増えていく。つまり、 $N$  が 2 倍となると計算量はほぼ 4 倍となる。これを逆に考えると、

$N$  が  $\frac{1}{2}$  となると、計算量はほぼ  $\frac{1}{4}$  となる

ということである。

ならば、多項式を離散 Fourier 逆変換する時に、偶数次の項と奇数次の項に分け、それぞれに対してサイズが半分の離散 Fourier 逆変換を施すことで、都合  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ 、つまり計算量を約半分とすることができるのではないだろうか。

多項式を偶数次の項と奇数次の項に分けて書くと、

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1x + \cdots + c_{N-1}x^{N-1} \\ &= c_0 + c_2x^2 + \cdots + c_{N-2}x^{N-2} \\ &\quad + x(c_1 + c_3x^2 + \cdots + c_{N-1}x^{N-2}) \end{aligned}$$

となる。このまま偶奇に分けて

$$\begin{aligned} g(x) &= c_0 + c_2x + \cdots + c_{N-2}x^{\frac{N-2}{2}} \\ h(x) &= c_1 + c_3x + \cdots + c_{N-1}x^{\frac{N-2}{2}} \end{aligned}$$

とおく。<sup>\*26</sup> この時

$$f(x) = g(x^2) + x \cdot h(x^2)$$

となる。サンプリング値を見ると、

$$\begin{aligned} f(\zeta^0) &= g(\eta^0) + \zeta^0 \cdot h(\eta^0) \\ f(\zeta^1) &= g(\eta^1) + \zeta^1 \cdot h(\eta^1) \\ &\vdots \\ f(\zeta^{\frac{N}{2}-1}) &= g(\eta^{\frac{N}{2}-1}) + \zeta^{\frac{N}{2}-1} \cdot h(\eta^{\frac{N}{2}-1}) \\ f(\zeta^{\frac{N}{2}}) &= g(\eta^{\frac{N}{2}}) + \zeta^{\frac{N}{2}} \cdot h(\eta^{\frac{N}{2}}) \\ f(\zeta^{\frac{N}{2}+1}) &= g(\eta^1) + \zeta^{\frac{N}{2}+1} \cdot h(\eta^1) \\ &\vdots \\ f(\zeta^{N-1}) &= g(\eta^{\frac{N}{2}-1}) + \zeta^{N-1} \cdot h(\eta^{\frac{N}{2}-1}) \end{aligned}$$

となっていて、 $g, h$  に関していえば、上半分と下半分は同じものである。<sup>\*27</sup>  $f, g, h$  の係数によるベクトルを

$$(c_0, \dots, c_{N-1}), \quad (a_0, \dots, a_{\frac{N}{2}-1}), \quad (b_0, \dots, b_{\frac{N}{2}-1})$$

とし、さらにそれぞれの離散 Fourier 逆変換を

---

<sup>\*26</sup> 次数に注意！

<sup>\*27</sup>  $\eta^{\frac{N}{2}} = 1$  に注意！

$$(\widehat{c}_0, \dots, \widehat{c}_{N-1}), \quad (\widehat{a}_0, \dots, \widehat{a}_{\frac{N}{2}-1}), \quad (\widehat{b}_0, \dots, \widehat{b}_{\frac{N}{2}-1})$$

の様に $\widehat{\phantom{x}}$ で表すと, 先のサンプリングは

$$\begin{aligned} \widehat{c}_0 &= \widehat{a}_0 + \zeta^0 \cdot \widehat{b}_0 \\ \widehat{c}_1 &= \widehat{a}_1 + \zeta^1 \cdot \widehat{b}_1 \\ &\vdots \\ \widehat{c}_{\frac{N}{2}-1} &= \widehat{a}_{\frac{N}{2}-1} + \zeta^{\frac{N}{2}-1} \cdot \widehat{b}_{\frac{N}{2}-1} \\ \widehat{c}_{\frac{N}{2}} &= \widehat{a}_0 + \zeta^{\frac{N}{2}} \cdot \widehat{b}_0 \\ \widehat{c}_{\frac{N}{2}+1} &= \widehat{a}_1 + \zeta^{\frac{N}{2}+1} \cdot \widehat{b}_1 \\ &\vdots \\ \widehat{c}_{N-1} &= \widehat{a}_{\frac{N}{2}-1} + \zeta^{N-1} \cdot \widehat{b}_{\frac{N}{2}-1} \end{aligned}$$

となる. さらに,  $\zeta^{\frac{N}{2}} = -1$  を用いて書き直すと,

$$\begin{aligned} \widehat{c}_0 &= \widehat{a}_0 + \zeta^0 \cdot \widehat{b}_0 \\ \widehat{c}_1 &= \widehat{a}_1 + \zeta^1 \cdot \widehat{b}_1 \\ &\vdots \\ \widehat{c}_{\frac{N}{2}-1} &= \widehat{a}_{\frac{N}{2}-1} + \zeta^{\frac{N}{2}-1} \cdot \widehat{b}_{\frac{N}{2}-1} \\ \widehat{c}_{\frac{N}{2}} &= \widehat{a}_0 - \zeta^0 \cdot \widehat{b}_0 \\ \widehat{c}_{\frac{N}{2}+1} &= \widehat{a}_1 - \zeta^1 \cdot \widehat{b}_1 \\ &\vdots \\ \widehat{c}_{N-1} &= \widehat{a}_{\frac{N}{2}-1} - \zeta^{\frac{N}{2}-1} \cdot \widehat{b}_{\frac{N}{2}-1} \end{aligned}$$

となる. これらを (小) 行列を用いて表すと,

$$\begin{pmatrix} \widehat{c}_0 \\ \vdots \\ \widehat{c}_{\frac{N}{2}-1} \\ \dots \\ \widehat{c}_{\frac{N}{2}} \\ \vdots \\ \widehat{c}_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{a}_0 \\ \vdots \\ \widehat{a}_{\frac{N}{2}-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta^0 & & \\ & \ddots & \\ & & \zeta^{\frac{N}{2}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{b}_0 \\ \vdots \\ \widehat{b}_{\frac{N}{2}-1} \end{pmatrix} \\ \dots \\ \begin{pmatrix} \widehat{a}_0 \\ \vdots \\ \widehat{a}_{\frac{N}{2}-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \zeta^0 & & \\ & \ddots & \\ & & \zeta^{\frac{N}{2}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{b}_0 \\ \vdots \\ \widehat{b}_{\frac{N}{2}-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (13)$$

となる. 従って, サイズが半分の離散 Fourier 逆変換

$$(\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{\frac{N}{2}-1}), \quad (\hat{b}_0, \dots, \hat{b}_{\frac{N}{2}-1})$$

から、掛け算を  $N$  回と足し算または引き算を  $N$  回の計  $2N$  回の計算で求める離散 Fourier 逆変換

$$(\hat{c}_0, \dots, \hat{c}_{N-1})$$

が得られることがわかる。

先に見た様に、離散 Fourier 逆変換を直接計算 ( $N$  次正方形行列と  $N$  次元ベクトルの積) した場合の計算量は、

$$2N^2 - N$$

であった。これに対し、偶数次奇数次に分け、半分のサイズで離散 Fourier 逆変換し、その後組み合わせた場合の計算量 (概算) は、上の考察から

$$2 \left( 2 \left( \frac{N}{2} \right)^2 - \frac{N}{2} \right) + 2N = N^2 + N$$

となり、確かにほぼ半分の計算量である。

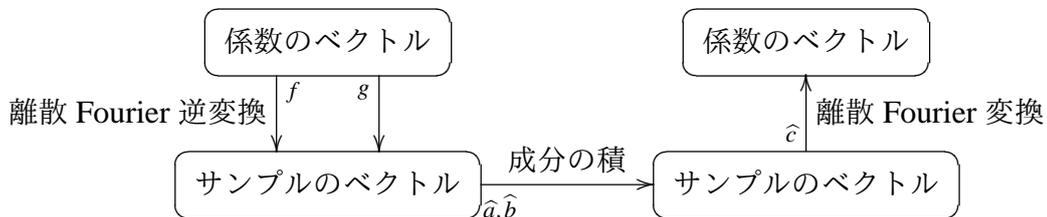
ここまで見てきた  $g, h$  をさらにそれぞれ偶数次と奇数次に分けて、それら 4 つをまたさらに偶数次と奇数次に分けて… と考えて行く。<sup>\*28</sup> 最後には  $1-1$  次以下、つまり定数項のみの多項式の離散 Fourier 逆変換となるが、その場合は定数項とサンプリング値は勿論一致する。従ってその時の離散 Fourier 逆変換は恒等写像であり、計算量は  $0$  である。

以上のこと、即ち半分の計算の組み合せの繰り返しを利用して離散 Fourier (逆) 変換を行うことを、高速 Fourier (逆) 変換という。<sup>\*29</sup> なお実際に必要となる計算量は

$$N \left( \frac{3}{2} \log_2 N - 1 \right) + 1$$

である。<sup>\*30</sup>

まとめると、 $N-1$  次以下の二つの多項式をそれぞれ高速 Fourier 逆変換し、



各成分の積を取り、それを高速 Fourier 変換するために必要な計算量は

$$2 \left( N \left( \frac{3}{2} \log_2 N - 1 \right) + 1 \right) + N + N \left( \frac{3}{2} \log_2 N - 1 \right) + 1 = \frac{9}{2} N \log_2 N - 2N + 3$$

<sup>\*28</sup> それを可能にするために、 $N = 2^m$  と最初に仮定した。

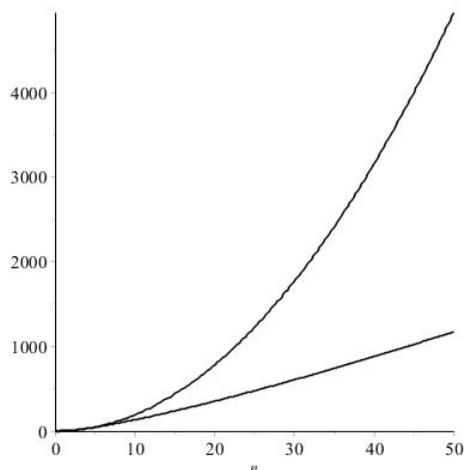
<sup>\*29</sup> 離散 Fourier 変換: Fast Fourier Transform (FFT)

<sup>\*30</sup> 附録 12.6 参照。

となる。<sup>\*31</sup> 一方、 $N-1$  次以下の二つの多項式の積を直接取るのに必要な計算量は

$$N(N+N-1) = 2N^2 - N$$

であるから、計算量をグラフで比べてみると、



となり、同じ計算結果をもたらすにも拘らず、異なる 2 つの手段の計算量をみると、 $N$  が大きくなるに従って差が顕著となっていく。

## 11 応用

2 進数表示された二つの大きな数

$$\begin{aligned} c &= c_0 + c_1 2 + \cdots + c_{N-1} 2^{N-1}, \\ d &= d_0 + d_1 2 + \cdots + d_{N-1} 2^{N-1} \end{aligned}$$

の積を求めたいとしよう。この場合、対応する多項式

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1 x + \cdots + c_{N-1} x^{N-1}, \\ g(x) &= d_0 + d_1 x + \cdots + d_{N-1} x^{N-1} \end{aligned}$$

を考えて、この  $f(x), g(x)$  に先の高速 Fourier 変換を用いた積を施し、得られた

$$f(x) \cdot g(x)$$

に  $x=2$  を代入すれば、求める積

$$c \cdot d = f(2) \cdot g(2)$$

を高速で計算することができる。

---

<sup>\*31</sup> ここでは、高速 Fourier 変換と高速 Fourier 逆変換の計算量は等しいとした。

## 12 附録

### 12.1 Gauß関数

所謂 Gauß積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

と、それを変換したもの

$$x = \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad x^2 = \frac{t^2}{2}, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{2}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

は本稿でしばしば用いた。Gauß積分の証明等については大学初年次向けの微分積分学のテキストを参照して頂きたい。

続いて、この附録においてしばしば用いられる事実を述べておこう。即ち、 $R, a \in \mathbb{R}$  に対して、Cauchy の積分定理より

$$\int_{-R}^R e^{-x^2} dx + \int_0^a e^{-(R+iy)^2} idy + \int_R^{-R} e^{-(x+ia)^2} dx + \int_a^0 e^{-(-R+iy)^2} idy = 0$$

が成り立つ。一方、

$$\begin{aligned} \left| \int_0^a e^{-(R+iy)^2} idy \right| &\leq \int_0^a \left| e^{-(R+iy)^2} \right| dy = \int_0^a \left| e^{-R^2+y^2-2iRy} \right| dy = \int_0^a e^{-R^2+y^2} dy \\ &\leq e^{-R^2+a^2} \int_0^a dy = e^{-R^2+a^2} a \end{aligned}$$

であり、 $e^{-R^2+a^2} a \rightarrow 0$  as  $R \rightarrow \infty$  であるから、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(R+iy)^2} idy = 0.$$

同様にして、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^0 e^{-(-R+iy)^2} idy = 0.$$

従って、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{-\infty} e^{-(x+ia)^2} dx \tag{14}$$

となる。<sup>\*32</sup>

---

<sup>\*32</sup> 関数論や Cauchy の積分定理を知らない読者も、結果の式のみを見てもえれば、 $x+ia=u$ ,  $dx=du$  としての“置換積分”  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$  かの様であることがわかってもらえるものと思う。

## 12.2 Fourier の反転公式

ここでは関数  $f(x)$  が, 周期を変数とする関数  $C(\omega)$  で

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

と表されているとして, Fourier 変換

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\eta x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega x} d\omega \right) e^{-i\eta x} dx$$

を求めよう. まず Gauß関数

$$h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

を考える. 勿論

$$h(\varepsilon x) = e^{-\frac{\varepsilon^2 x^2}{2}} \rightarrow 1 \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0$$

である.  $f(x)$  とあわせて,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(\varepsilon x) f(x) e^{-i\eta x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\varepsilon x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega x} d\omega \right) e^{-i\eta x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} h(\varepsilon x) C(\omega) e^{i\omega x} e^{-i\eta x} d\omega \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} h(\varepsilon x) C(\omega) e^{i(\omega-\eta)x} d\omega \right) dx \end{aligned}$$

ここで,  $\varepsilon x = z$ ,  $x = \frac{z}{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon dx = dz$  と変換すると,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} h(z) C(\omega) e^{i(\omega-\eta)\frac{z}{\varepsilon}} d\omega \right) \frac{dz}{\varepsilon}$$

さらに,  $\omega - \eta = \varepsilon \zeta$ ,  $d\omega = \varepsilon d\zeta$  と変換すると,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} h(z) C(\eta + \varepsilon \zeta) e^{i\zeta z} d\zeta \right) dz$$

$\varepsilon \rightarrow 0$  の時,

$$\begin{aligned} &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} h(z) C(\eta) e^{i\zeta z} d\zeta \right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} h(z) e^{i\zeta z} d\zeta \right) dz \cdot C(\eta) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} e^{i\zeta z} d\zeta \right) dz \cdot C(\eta) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2 - 2i\zeta z}{2}} d\zeta \right) dz \cdot C(\eta) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-i\zeta)^2 - (i\zeta)^2}{2}} d\zeta \right) dz \cdot C(\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-i\zeta)^2 + \zeta^2}{2}} d\zeta \right) dz \cdot C(\eta) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-i\zeta)^2}{2}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta \right) dz \cdot C(\eta) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-i\zeta)^2}{2}} dz \right) e^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta \cdot C(\eta)
\end{aligned}$$

(14) を用いて,

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) e^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta \cdot C(\eta) \\
&= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta \right) C(\eta)
\end{aligned}$$

Gauß積分を用いて,

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2\pi} \sqrt{2\pi} C(\eta) \\
&= 2\pi C(\eta)
\end{aligned}$$

となり, 周期を変数とする関数  $C(\omega)$  が得られた.

### 12.3 Fourier 変換の例

Gauß関数

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

を Fourier 変換してみよう.

$$\begin{aligned}
C(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2} - i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2 + 2\sigma^2 i\omega x}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x + \sigma^2 i\omega)^2 - \sigma^4 i^2 \omega^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x + \sigma^2 i\omega)^2 + \sigma^4 \omega^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x + \sigma^2 i\omega)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{\sigma^4 \omega^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x + \sigma^2 i\omega)^2}{2\sigma^2}} dx \cdot e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}
\end{aligned}$$

(14) を用いて,

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \cdot e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$$

ここで,  $x = \sigma t$ ,  $dy = \sigma dt$  と変換すると,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt \cdot e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cdot e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \end{aligned}$$

Gauß積分を用いて,

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma}{2\pi} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \end{aligned}$$

となり, やはり Gauß関数となる.

## 12.4 熱核

本編7の熱核について,

$$\begin{aligned} K(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t + i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega\sqrt{t} - \frac{ix}{2\sqrt{t}})^2 - \frac{x^2}{4t}} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega\sqrt{t} - \frac{ix}{2\sqrt{t}})^2} d\omega \end{aligned}$$

$\omega\sqrt{t} = \eta$ ,  $\sqrt{t}d\omega = d\eta$  と変換すると,

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\eta - \frac{ix}{2\sqrt{t}})^2} d\eta$$

ここで, (14) を用いて,

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta$$

Gauß積分を用いて,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

となる.

## 12.5 Parseval-Plancherel の等式

係数のベクトル

$$c = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1}), \quad d = (d_0, d_1, \dots, d_{N-1})$$

の離散 Fourier 逆変換

$$\widehat{c} = (f(1), f(\zeta), f(\zeta^2), \dots, f(\zeta^{N-1})), \quad \widehat{d} = (g(1), g(\zeta), g(\zeta^2), \dots, g(\zeta^{N-1}))$$

を考える。サンプリングのベクトルの各成分は

$$\widehat{c}_l = f(\zeta^l) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \zeta^{kl}$$

である。

離散 Fourier 変換を与える行列は  $(1/N)D_{-\zeta}$  であった。従って、サンプリングのベクトル  $\widehat{d}$  の離散 Fourier 変換として係数のベクトルを考えると

$$\begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta^{-1} & \dots & \zeta^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{-(N-1)} & \dots & \zeta^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{d}_0 \\ \widehat{d}_1 \\ \vdots \\ \widehat{d}_{N-1} \end{pmatrix}$$

この時の成分は

$$d_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \zeta^{-kl} g(\zeta^l)$$

となっている。今係数のベクトルの複素内積を考えると、

$$\begin{aligned} (c, d) &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \overline{d_k} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \overline{\left( \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \zeta^{-kl} g(\zeta^l) \right)} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \left( \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \zeta^{-kl} \overline{g(\zeta^l)} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} c_k \zeta^{-kl} \overline{g(\zeta^l)} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \left( \sum_{k=0}^{N-1} c_k \zeta^{-kl} \right) \overline{g(\zeta^l)} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(\zeta^l) \overline{g(\zeta^l)} \\ &= \frac{1}{N} (\widehat{c}, \widehat{d}). \end{aligned}$$

従って、係数のベクトルとそれらの離散 Fourier 逆変換で得られたサンプリングのベクトルの複素内積について、

$$(c, d) = \frac{1}{N} (\widehat{c}, \widehat{d}),$$

ノルムについて、

$$\|c\|^2 = \frac{1}{N} \|\widehat{c}\|^2$$

が成り立つ。(Parseval-Plancherel の等式)

## 12.6 高速 Fourier 変換の計算量

2 の冪  $N = 2^m$  と 1 の原始  $N$  乗根  $\zeta = e^{2\pi i/N}$  を考える．離散 Fourier 逆変換 (13) を，変換行列  $D_\zeta, D_\eta$  を用いて表すと，

$$D_\zeta \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{\frac{N}{2}-1} \\ \dots \\ c_{\frac{N}{2}} \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_\eta \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{\frac{N}{2}-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta^0 & & \\ & \ddots & \\ & & \zeta^{\frac{N}{2}-1} \end{pmatrix} D_\eta \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{\frac{N}{2}-1} \end{pmatrix} \\ \dots \\ D_\eta \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{\frac{N}{2}-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \zeta^0 & & \\ & \ddots & \\ & & \zeta^{\frac{N}{2}-1} \end{pmatrix} D_\eta \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{\frac{N}{2}-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

となる．

$N = 2^m$  の時の変換が計算量  $S(m)$  で得られるとした時， $\zeta^0 = 1$  であり，上半分と下半分は +, - を除き同じものであることを考慮すると，

$$\begin{aligned} S(m) &= 2S(m-1) + 2^{m-1} - 1 + 2^{m-1} + 2^{m-1} \\ &= 2S(m-1) + 3 \cdot 2^{m-1} - 1 \end{aligned}$$

となる．変形していくと，

$$\begin{aligned} S(m) - 1 &= 2(S(m-1) - 1) + 3 \cdot 2^{m-1} \\ \frac{S(m) - 1}{2^m} &= \frac{S(m-1) - 1}{2^{m-1}} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

これは公差の等差数列であり，また  $S(0) = 0$  を考慮すると，

$$\frac{S(m) - 1}{2^m} = \frac{S(0) - 1}{2^0} + \frac{3}{2} m = \frac{3}{2} m - 1$$

従って，

$$S(m) = 2^m \left( \frac{3}{2} m - 1 \right) + 1$$

となる．

## 参考文献

- [1] Émile Picard, *Leçons sur quelques équations fonctionnelles avec des applications a divers problèmes d'analyse et de physique mathématique*, rédigées par Eugène Blanc, Gauthier-Villars (1928) ; 山口昌哉, 田村祐三訳, *偏微分方程式論 — 数理物理学への応用を含む*, 現代数学社 (1977).

- [2] Иван Георгиевич Петровский (ペトロフスキー), Лекции об Уравнениях с Частными Производными, ГОСТЕХИЗДАТ, Москва, (1953) ; 吉田耕作校閲, 渡辺毅訳, 偏微分方程式論, 東京図書 (1958).
- [3] 伊藤清三, ルベーク積分入門, 数学選書 4, 裳華房 (1963).
- [4] 藤田宏, 池部晃生, 犬井鉄郎, 高見穎郎, 数理物理に現れる偏微分方程式, 岩波講座基礎数学, 岩波書店 (1977).
- [5] Rudolf Lidl and Günter Pilz, Applied Abstract Algebra, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2nd edition (1997).
- [6] 金谷 健一, これなら分かる応用数学教室 — 最小二乗法からウェーブレットまで, 共立出版 (2003).